Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell dans le vide en dimension 3

Abderrahmane BENDALI et Laurence HALPERN

Résumé — Nous présentons ici une méthode pour obtenir des conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell, reposant sur l'étude directe du système. Nous établissons la condition transparente sur la frontière d'un demi-espace et nous l'approchons pour une incidence proche de la normale. Nous retrouvons au premier ordre la condition de Silver-Müller et nous établissons une condition d'ordre 2 dont nous montrons qu'elle est bien posée. Pour des domaines réguliers nous retrouvons les conditions d'Engquist-Majda pour l'équation des ondes.

Absorbing boundary conditions for the three-dimensional Maxwell system

Abstract — *We introduce here absorbing boundary conditions for the Maxwell system, obtained by considering the whole system. We write the transparent condition on the boundary of a half-space and approximate it for normal incidence. The first approximation is the so-called Silver-Müller radiation condition. We set a second order boundary condition, which is well-posed. For regular geometries, the system reduces to the wave equation, and our boundary condition contains the one of Engquist-Majda.*

I. INTRODUCTION. — Considérons les équations de Maxwell en dimension 3 dans le vide :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} - \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{f} \\ \partial_t \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{g} \end{cases} \tag{1}$$

où **f** et **g** ainsi que les conditions initiales sur **E** et **H** sont à support compact dans $[a, b] \times \mathbb{R}^2$. Les fonctions **f** et **g** sont de plus supposées être à divergence nulle. La démarche habituelle pour écrire des conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell consiste à remarquer que le champ électrique est solution de l'équation des ondes et à appliquer alors à **E** les conditions aux limites de Engquist-Majda [3] ou Bayliss-Turkel [1]. C'est ce que nous avions fait dans [2]. Cependant dans certains cas on ne peut pas se ramener à l'équation des ondes (lorsque la géométrie présente des singularités), et certains codes discrétisent directement le système (1). Il est donc important de disposer de conditions aux limites adaptées à ce système. Nous nous proposons donc ici de travailler directement sur le système (1), en généralisant la technique développée dans [3] pour les systèmes strictement hyperboliques. Nous écrivons la condition aux limites transparente en x_1 au moyen de la transformation de Fourier en temps et dans la direction transverse (x_2, x_3). Nous approchons ensuite cette condition au voisinage de l'incidence normale. A l'ordre 0 nous retrouvons la condition de radiation classique dite de Silver-Müller. D'immédiates estimations *a priori* montrent qu'elle est bien posée. Nous écrivons ensuite une condition d'ordre 2 en temps et dans les directions tangentielles dont nous montrons qu'elle est bien posée au sens faible.

II. LA CONDITION AUX LIMITES TRANSPARENTE. — A l'extérieur du support des données le système de Maxwell peut s'écrire sous forme de système symétrique :

$$\partial_t u = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{A}_i \partial_i u \tag{2}$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0249-6291/88/03071011 $ 2.00

où $u=(\mathrm{H}, \mathrm{E})$. La matrice A_1 est diagonalisable. A l'extérieur du support des données, nous effectuons une transformation de Fourier en t, x_2, x_3. Les variables duales sont ω, η_2 et η_3. Nous noterons les variables homogènes $\varepsilon_i=\eta_i/\omega$ et $\varepsilon=(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Le système se réduit à un système différentiel du premier ordre en x_1 dans la variable $w=1/2(\mathrm{H}_3+\mathrm{E}_2, -\mathrm{H}_2+\mathrm{E}_3, -\mathrm{H}_3+\mathrm{E}_2, \mathrm{H}_2+\mathrm{E}_3)$:

$$\partial_1 w=\mathrm{M}(\varepsilon)\, i\,\omega\, w. \tag{3}$$

La matrice $\mathrm{M}(\varepsilon)$ a deux valeurs propres doubles $\pm\lambda$, où $\lambda=(1-|\varepsilon|^2)^{1/2}$ avec $|\varepsilon|^2=\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2$. Si $\mathrm{T}(\varepsilon)$ est la matrice de passage à la forme diagonale, la condition aux limites transparente est $(\mathrm{T}^{-1} w)_{\mathrm{I}}=0$ en amont et $(\mathrm{T}^{-1} w)_{\mathrm{II}}=0$ en aval. En revenant dans les variables **H** et **E** nous obtenons :

THÉORÈME 1. — *La condition aux limites transparente aval en x_1 s'écrit :*

$$\left[\mathrm{I}-\frac{4\alpha(\varepsilon)}{|\varepsilon|^4}\mathrm{G}(\varepsilon)\right]\begin{bmatrix}\mathrm{E}_2\\ \mathrm{E}_3\end{bmatrix}+\left[\mathrm{I}+\frac{4\alpha(\varepsilon)}{|\varepsilon|^4}\mathrm{G}(\varepsilon)\right]\begin{bmatrix}-\mathrm{H}_3\\ \mathrm{H}_2\end{bmatrix}=0 \tag{4}$$

où

$$\alpha(\varepsilon)=1-\frac{1}{2}|\varepsilon|^2-\lambda \quad \textit{et} \quad \mathrm{G}(\varepsilon)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\varepsilon_3^2-\varepsilon_2^2 & -2\varepsilon_2\varepsilon_3\\ -2\varepsilon_2\varepsilon_3 & -(\varepsilon_3^2-\varepsilon_2^2)\end{bmatrix} \tag{5}$$

en amont λ est changé en $-\lambda$.

III. CONDITIONS AUX LIMITES APPROCHÉES. — Nous approchons la condition (4) à incidence normale, c'est-à-dire pour de petites valeurs du paramètre ε. A l'ordre 0 on obtient aisément :

THÉORÈME 2. — *La condition aux limites absorbante d'ordre* 0 *s'écrit :*

$$\mathscr{P}(\mathbf{E}+\mathbf{n}\wedge\mathbf{H})=\mathbf{0} \tag{6}$$

où **n** *est la normale extérieure (ici le vecteur unitaire dans la direction $x_1>0$ en aval et $x_1<0$ en amont) et $\mathscr{P}$ la projection sur le plan (x_2, x_3). Elle est dissipative et le problème associé est bien posé.*

Remarquons que ε n'intervient ici que par son carré. La prochaine condition aux limites correspond à une approximation d'ordre 2 :

THÉORÈME 3. — *Une condition aux limites approchée d'ordre* 2 *en aval s'écrit :*

$$\left[\partial_{tt}\mathrm{I}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\partial_{33}-\partial_{22} & -2\partial_{23}\\ -2\partial_{23} & -\partial_{33}+\partial_{22}\end{bmatrix}\right]\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{E}_2\\ \mathrm{E}_3\end{bmatrix}+\partial_{tt}\begin{bmatrix}-\mathrm{H}_3\\ \mathrm{H}_2\end{bmatrix}=0. \tag{7}$$

Le problème aux limites associé dans le demi-espace $x_1<0$ est faiblement bien posé.

Démonstration. — Pour une solution régulière du problème aux limites, la condition (7) s'écrit :

$$(\partial_t+\partial_1)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\partial_t+\partial_1)\mathrm{E}_2-\partial_2\mathrm{E}_1\\ \frac{1}{2}(\partial_t+\partial_1)\mathrm{E}_3-\partial_3\mathrm{E}_1\end{bmatrix}=0. \tag{8}$$

D'après [4] la condition suffisante pour que le problème soit faiblement bien posé est qu'il n'existe pas de mode concentré sur la frontière et explosant en temps, ou en termes plus mathématiques, il n'existe pas de solution du système couplé de la forme :

$$\begin{cases} u=\hat{u}\exp[st+\xi_1 x_1+i(\eta_2 x_2+\eta_3 x_3)],\\ \operatorname{Re} s>0, \quad \operatorname{Re}\xi_1\geqq 0, \quad (\eta_2, \eta_3)\in\mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{9}$$

Grâce à la forme (8) de la condition aux limites, il est facile de vérifier qu'un mode propre de la forme (9) solution du système couplé (1), (7) doit s'écrire sous l'une des deux formes :

(10 *a*) $$u=\hat{u}\exp i\omega(t-x_1),\qquad {}^t\hat{u}_6=(0,\ 1,\ 1, 0,\ -1,\ 1)$$

(10 *b*) $$u=\hat{u}\exp i\omega(t+x_1),\qquad {}^t\hat{u}_6=(0,\ 1,\ 0,\ +1,\ 1),$$

où ω est un nombre réel, ce qui est incompatible avec (9).

Remarque 1. — La condition aux limites (10) contient la condition $(\partial_t+\partial_1)^2 H_1=0$ qui peut être obtenue en écrivant pour H_1, solution de l'équation des ondes, la condition aux limites d'ordre 2 de [4]. Pour retrouver la même condition portant sur le champ électrique E_1, il faut coupler (7) avec la condition symétrique obtenue en exprimant le champ électrique en fonction du champ magnétique.

Remarque 2. — En dimension 2 la condition d'ordre 2 est en fait différentielle d'ordre 1. Dans le cas d'un champ transverse magnétique elle s'écrit :

(11) $$\partial_t E+\frac{1}{2}\partial_n H_1+\partial_t H_2=0.$$

Note reçue le 21 avril 1988, acceptée le 7 juin 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BAYLISS et E. TURKEL, Radiation boundary conditions for wave-like equations, *C.P.A.M.*, XXXIII, 1980, p. 707-727.

[2] A. BENDALI et L. HALPERN, Approximation par troncature de domaine de la solution du problème aux limites extérieur pour le système de Maxwell en régime sinusoïdal, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 294, série I, 1982, p. 557-560.

[3] B. ENGQUIST et A. MAJDA, Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math. of Comp.*, 31, n° 139, 1977, p. 629-651.

[4] A. MAJDA et S. OSHER, Initial boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary, *C.P.A.M.*, XXVIII, 1975, p. 607-675.

A. B. : *U.S.T.H.B.*, *Bab Ezzouar, Dar el Beida*, B.P. n° 19, *Alger, Algérie;*

L. H. : *Centre de Mathématiques appliquées, École Polytechnique*, 91128 *Palaiseau Cedex.*